

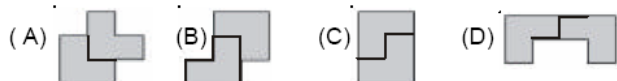
PROVA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

1. (ALTERNATIVA B)

Por leitura direta da figura, vemos que uma extremidade do selo está na marca de 20 cm e a outra na marca de 16,6 cm. O comprimento do selo é a diferença entre estes dois valores, ou seja, $20 - 16,6 = 20,0 - 16,6 = 3,4$ cm.

2. (ALTERNATIVA E)

Os desenhos abaixo mostram como juntar as duas peças para obter as alternativas (A), (B), (C) e (D). Apenas a alternativa (E) não pode ser obtida juntando as duas peças, como se pode verificar diretamente por tentativas.



3. (ALTERNATIVA D)

As figuras mostram que o tanque de gasolina do carro continha $\frac{3}{4}$ de sua capacidade no momento de partida e $\frac{1}{4}$ no momento de chegada. Deste modo, João gastou $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ do tanque na viagem. Como o tanque tem capacidade para 50 litros, isto quer dizer que João gastou $50 \times \frac{1}{2} = 25$ litros de gasolina na viagem. Note que esta última conta pode ser pensada como "João gastou meio tanque de gasolina e a metade de 50 é 25".

4. (ALTERNATIVA C)

Como há 22 times no campeonato e cada time só não enfrenta a si próprio, então ele joga 21 vezes (com os outros 21 times) em seu campo e mais 21 vezes nos campos dos adversários. No total cada time disputa $21 + 21 = 42$ partidas.

5. (ALTERNATIVA E)

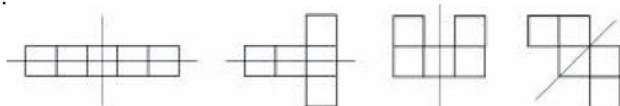
Como o time disputou 20 jogos, venceu 8 e perdeu 8, o número de empates é: $20 - 8 - 8 = 4$. Logo, o time obteve $8 \times 3 = 24$ pontos com as vitórias e $4 \times 1 = 4$ pontos com os empates. Portanto, o time obteve $24 + 4 = 28$ pontos (o time não ganha pontos quando perde).

6. (ALTERNATIVA E)

Às 12h 30min o ponteiro dos minutos deu meia volta no relógio a partir do número 12 do mostrador, ou seja, percorreu $360^\circ \div 2 = 180^\circ$. Os números 1, 2, 3, ..., 12 do mostrador do relógio dividem a circunferência em doze ângulos iguais, cada um com $360^\circ \div 12 = 30^\circ$. Logo, a cada hora, o ponteiro das horas (o menor) percorre um ângulo de 30° ; em meia-hora este ponteiro percorre então $30^\circ \div 2 = 15^\circ$. Logo, o ângulo formado pelos dois ponteiros é $180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

7. (ALTERNATIVA B)

Abaixo estão indicadas as 4 figuras que possuem um ou mais eixos de simetria.

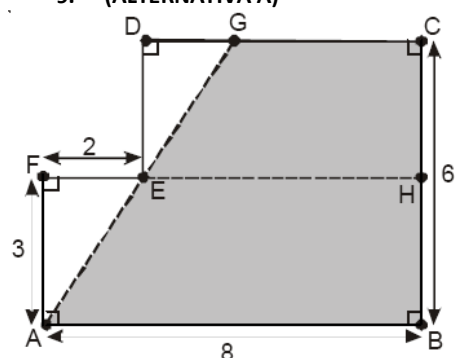


8. (ALTERNATIVA D)

Como o padrão de distribuição dos números pelas colunas se repete de 15 em 15, na coluna E estarão os múltiplos de 15. O algoritmo da divisão nos diz que $2005 = 133 \times 15 + 10 = 1995 + 10$. Logo 1995 ocupará a coluna E, e para alcançarmos 2005 faltam mais 10 números (de 1996 a 2005) para serem colocados na tabela. Colocando esses números na tabela de acordo com o padrão, verificamos que 2005 ocupará a coluna D.

A	B	C	D	E
				1995
1996				
1997	1998			
1999	2000	2001		
2002	2003	2004	2005	

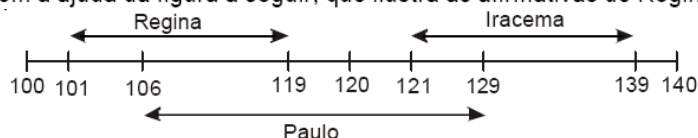
9. (ALTERNATIVA A)



A área pedida é igual à área do polígono $ABCDEF$ menos a soma das áreas dos triângulos retângulos AEF e DEG . A área do triângulo AEF é $\frac{AF \times EF}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$. Vamos agora calcular a área do triângulo DEG . Para calcular DE prolongamos EF até o ponto H , obtendo assim os retângulos $ABHF$ e $CDEH$. Como os lados opostos de um retângulo são iguais, segue que $DE = CH = CB - BH = 6 - AF = 6 - 3 = 3$. Como os lados AF e DE são paralelos, então $\hat{EAF} = \hat{GDE}$. Além disso $AF = ED$, logo os triângulos AEF e DEG são congruentes (caso ALA) e portanto, têm a mesma área. A área do retângulo $ABHF$ é $AD \times AF = 8 \times 3 = 24 \text{ cm}^2$, e a do retângulo $CDEH$ é $DE \times CD = 3 \times (AB - EF) = 3 \times (8 - 2) = 18 \text{ cm}^2$. Portanto a área procurada é $24 + 18 - 2 \times 3 = 36 \text{ cm}^2$. Alternativamente, a área do trapézio $ABCG$ cuja altura é $BC = 6$ e cuja as bases são $AB = 8$ e $CG = CD - GD = 6 - 2 = 4$ pode ser calculada diretamente. Portanto a área é $\frac{8+4}{2} \times 6 = 36 \text{ cm}^2$.

10. (ALTERNATIVA E)

Acompanhe a solução com a ajuda da figura a seguir, que ilustra as afirmativas de Regina, Paulo e Iracema.



(i) Se Regina está certa, então Paulo e Iracema estão errados. Os números que satisfazem a afirmação de Regina mas não satisfazem a afirmação de Paulo são 101, 102, 103, 104 e 105; note que estes números também não satisfazem a afirmação de Iracema. Neste caso temos 5 possibilidades para o número de bolas na caixa. (ii) Se Paulo está certo, então Regina e Iracema estão erradas. O único número que satisfaz as opções de Paulo e não satisfaz as de Regina e Iracema é 120. Aqui, temos apenas uma possibilidade para o número de bolas na caixa. (iii) Se Iracema está certa, então Paulo e Regina estão errados. Os números que satisfazem a afirmação de Iracema mas não satisfazem a afirmação de Paulo são 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138 e 139; note que estes números também não satisfazem a afirmação de Regina. Neste caso, temos 10 possibilidades para o número de bolas na caixa. Finalmente, o número total de possibilidades é a soma do número de possibilidades nos casos (i), (ii) e (iii), que é $5+1+10=16$.

11.

A) Há várias soluções, como por exemplo

$$45 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \xrightarrow{\text{dobra}} 8 \xrightarrow{\text{dobra}} 16 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

$$45 \xrightarrow{\text{dobra}} 90 \xrightarrow{\text{apaga}} 9 \xrightarrow{\text{dobra}} 18 \xrightarrow{\text{apaga}} 1.$$

B) Aqui também há várias soluções, como por exemplo

$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{apaga}} 3 \xrightarrow{\text{dobra}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

$$345 \xrightarrow{\text{apaga}} 34 \xrightarrow{\text{dobra}} 68 \xrightarrow{\text{apaga}} 6 \xrightarrow{\text{dobra}} 12 \xrightarrow{\text{apaga}} 1$$

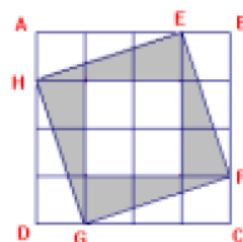
C) Aplicamos a regra “apaga” até sobrar apenas um algarismo, e temos então três casos:

1. Este algarismo é igual a 1 e a brincadeira acaba.
2. Este algarismo é 2, 3 ou 4 : neste caso aplicamos a regra “dobra” algumas vezes até obter um número de dois algarismos cujo algarismo das dezenas seja 1 (16, 12 ou 16, respectivamente), e aplica-se a regra “apaga” obtendo o número 1.
3. Este algarismo é 5, 6, 7, 8 ou 9: neste caso aplica-se a regra “dobra” uma vez, obtendo respectivamente 10, 12, 14, 16 ou 18; então aplica-se a regra “apaga” para obter o número 1.

12.

A) *Solução 1:* A figura ao lado mostra que o quadrado $EFGH$ é formado por quatro triângulos iguais (AEH , EFB , FGC e GHD) e quatro quadradinhos. Cada um dos triângulos tem área igual à metade da área de três quadradinhos. Logo, a área do quadrado $EFGH$ é igual à área de $4 + 4 \times \frac{3}{2} = 4 + 6 = 10$ quadradinhos. Como a área do quadrado $ABCD$ é igual à área de 16 quadradinhos, a fração pedida é

$$\frac{\text{área do quadrado } EFGH}{\text{área do quadrado } ABCD} = \frac{\text{área de 10 quadradinhos}}{\text{área de 16 quadradinhos}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$



A área (em quadradinhos) do quadrado $EFGH$ também pode ser calculada subtraindo-se da área do quadrado $ABCD$ a área dos quatro triângulos externos ao quadrado $EFGH$. Cada um destes triângulos tem área igual à área de $\frac{3}{2}$ quadradinhos, donde a área do quadrado $EFGH$ é igual à área de $16 - 4 \times \frac{3}{2} = 16 - 6 = 10$ quadradinhos.

Solução 2: Se um quadrado tem lado de medida L (em alguma unidade de comprimento) então sua área é L^2 (a unidade de área é o quadrado da unidade de comprimento). Deste modo, para calcular a área do quadrado $EFGH$, basta calcular HE^2 , o que fazemos a seguir

Seja k o lado de um dos quadradinhos. O teorema de Pitágoras mostra que

$$HE^2 = AH^2 + AE^2 = k^2 + (3k)^2 = 10k^2$$

e já achamos a área do quadrado $EFGH$. Como a área do quadrado $ABCD$ é $16k^2$, segue que a fração pedida é

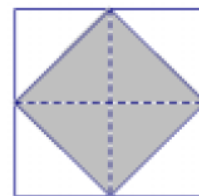
$$\frac{10k^2}{16k^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

B) Notamos primeiro que o quadrado sombreado tem metade da área do quadrado $EFGH$. Isto fica claro na figura ao lado, onde vemos que o quadrado $EFGH$ pode ser decomposto em oito triângulos iguais, quatro dos quais formam o quadrado sombreado.

Usando o resultado do item (A), vemos que a área do quadrado $EFGH$ é

$$\frac{5}{8} \times 80 = 50 \text{ cm}^2, \text{ e segue que a área do quadrado sombreado é igual a } \frac{1}{2} \times 50 = 25 \text{ cm}^2.$$

Como $25 = 5^2$ segue que o lado do quadrado sombreado mede 5 cm.



PROVA PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

1. (ALTERNATIVA D) VER QUESTÃO 3 DA PROVA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

2. (ALTERNATIVA C)

As amostras cujo percentual de álcool é maior que o de gasolina são aquelas que contêm mais de 50% de álcool. No gráfico, estas amostras correspondem àquelas cuja barra horizontal ultrapassa a marca de 50%, que são as amostras 1, 2 e 3.

3. (ALTERNATIVA A)

De acordo com o enunciado, a expressão que fornece a temperatura *Celsius* (C) em função da temperatura *Fahrenheit* (F) é $C = 5/9 (F - 32)$ (*). Essa expressão é da forma $C = aF + b$, onde $a = 5/9$ e $b = -160/9$. Logo, seu gráfico é uma reta, excluindo assim as opções (D) e (E). Esta reta corta o eixo F no ponto de ordenada $C = 0$, o que acontece quando $F = 32$, de acordo com a expressão (*). Isto elimina a opção (C). Além disso, como $a = 5/9 > 0$, a inclinação da reta é positiva, o que elimina a opção (B).

4. (ALTERNATIVA A)

O padrão usado para cobrir a parede é formado por mosaicos constituídos de nove azulejos, como na figura.



Em cada mosaico, a área preta corresponde à metade de quatro quadrados, ou seja, a dois quadrados. Deste modo, a área preta é $2/9$ da área do mosaico e a área branca é $1 - 2/9 = 7/9$ da área do mosaico. A parede tem $9 \text{ m} = 900 \text{ cm}$ de comprimento e $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$ de altura. Como $900 \div 30 = 30$ e $300 \div 30 = 10$, a parede pode ser coberta por $30 \times 10 = 300$ mosaicos, cada um com área $30 \times 30 = 900 \text{ cm}^2$. Deste modo, a área da parede coberta com a cor branca é $7/9 \times 900 \times 300 = 210000 \text{ cm}^2 = 21 \times 10000 \text{ cm}^2 = 21 \text{ m}^2$.

5. (ALTERNATIVA C)

Denotemos por c o comprimento e por l a largura do terreno. Então o perímetro do terreno é $2 \times (c + l)$ e sua área é $c \times l$. Já sabemos a área do terreno, que é 60 m^2 , donde $c \times l = 60$. O enunciado nos diz que foram usados 64 m de arame para uma cerca de dois fios, e assim o perímetro do terreno é $64 \div 2 = 32 \text{ m}$. Logo $2 \times (c + l) = 32$ e concluímos que $c + l = 16$. Segue que c e l são dois números cuja soma é 16 e o produto é 60 . É fácil ver que esses números são 6 e 10 . Assim, a diferença pedida é $10 - 6 = 4 \text{ m}$.

Mais geralmente, sabemos que o problema de determinar dois números reais dos quais se conhece a soma s e o produto p equivale a achar as soluções da equação $x^2 - sx + p = 0$. As raízes reais desta equação (caso existam) serão os números procurados. No nosso caso, temos que c e l são raízes de $x^2 - 16x + 60 = 0$. Usando a fórmula habitual $x = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 60}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2}$ obtemos as raízes 6 e 10 .

6. (ALTERNATIVA D)

Se v é a velocidade desenvolvida por Ana, então a velocidade desenvolvida por Beatriz é $v + 10$. No momento em que as duas se cruzam, a distância percorrida por Ana é $150 - 30 = 120 \text{ km}$ e a percorrida por Beatriz é $150 + 30 = 180 \text{ km}$.

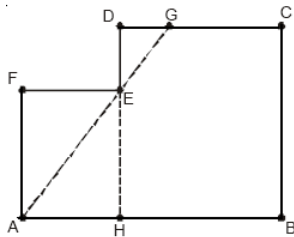
Como $\text{tempo} = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}}$ e o tempo gasto pelas duas até o momento do encontro é o mesmo, temos $\frac{120}{v} = \frac{180}{v + 10}$.

Logo $120(v + 10) = 180v$, donde $v = 20 \text{ km/h}$.

7. (ALTERNATIVA B)

Considere o triângulo retângulo cuja hipotenusa é a escada que mede 25 m , um dos catetos é o segmento ligando o pé da escada à base do edifício, que mede 7 m , e o outro cateto é o segmento da parede do edifício que une o topo da escada ao solo. O comprimento x deste último cateto pode ser calculado imediatamente a partir do Teorema de Pitágoras: temos $25^2 = 7^2 + x^2$ e obtemos $x = 24 \text{ m}$. Quando o topo da escada escorrega 4 m para baixo, obtemos um novo triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 25 m e um dos catetos mede $24 - 4 = 20 \text{ m}$. O outro cateto y deste triângulo é determinado, outra vez, pelo Teorema de Pitágoras: temos $25^2 = 20^2 + y^2$ e segue que $y = 15 \text{ m}$. Logo, o deslocamento do pé da escada será de $15 - 7 = 8 \text{ m}$.

8. (ALTERNATIVA D)



O perímetro p é dado por $p = AB + BC + CG + AG$. Como já conhecemos AB e BC , o problema é calcular CG e AG . Para isto, precisamos determinar a medida de outros segmentos na figura, e começamos calculando a medida de CD , DE e AE . Prolongando DE até o ponto H , obtemos os retângulos $AHEF$ e $BCDH$.

Como num retângulo os lados opostos são iguais, temos $EH = AF = 4$, $AH = EF = 3$ e $DH = BC = 6$. Logo $CD = BH = AB - AH = 8 - 3 = 5$ e $DE = DH - EH = BC - AF = 6 - 4 = 2$. Para determinar AE , note que o triângulo AEF é retângulo de catetos $AF = 4$, $EF = 3$ e hipotenusa AE ; do Teorema de Pitágoras segue que $AE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Vamos agora calcular EG e DG . Note que os triângulos AEF e DEG são ambos retângulos e os seus ângulos em \hat{A} e \hat{E} são iguais, pois os lados AF e DE são paralelos. Logo estes triângulos são semelhantes. Temos então $\frac{AE}{EG} = \frac{AF}{DE} = \frac{EF}{DG}$, ou seja, $\frac{5}{EG} = \frac{4}{2} = \frac{3}{DG}$. Assim $EG = 2,5$ e $DG = 1,5$, donde $CG = CD - DG = 5 - 1,5 = 3,5$. Agora podemos calcular o perímetro pedido: $p = AB + BC + CG + GA = AB + BC + CG + GE + EA = 8 + 6 + 3,5 + 2,5 + 5 = 25$ cm.

9. (ALTERNATIVA B)

Como há 7 possíveis adversários para o Brasil, todos com a mesma chance de serem escolhidos, a probabilidade do adversário do Brasil na primeira rodada ser a Argentina é $1/7$.

10. (ALTERNATIVA E) VER QUESTÃO 10 DA PROVA PARA ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

11.

A) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10 - x$; quando $x = 2$, estes catetos valem 2 e 8. Logo a área de cada canteiro é $\frac{2 \times 8}{2} = 8 \text{ m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2 segue que a área do canteiro central é $100 - 4 \times 8 = 68 \text{ m}^2$.

B) Cada canteiro triangular é um triângulo retângulo de catetos x e $10 - x$, tendo assim área de $\frac{1}{2}x(10 - x) \text{ m}^2$. Como a área total da praça é 100 m^2 , segue que a área do canteiro central é

$$100 - 4 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x) = 2x^2 - 20x + 100 \text{ m}^2$$

Pode-se também notar que o lado L do canteiro de grama é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos x e $10 - x$. A área deste canteiro é L^2 . Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$L^2 = x^2 + (10 - x)^2 = x^2 + 100 - 20x + x^2 = 2x^2 - 20x + 100$$

como antes.

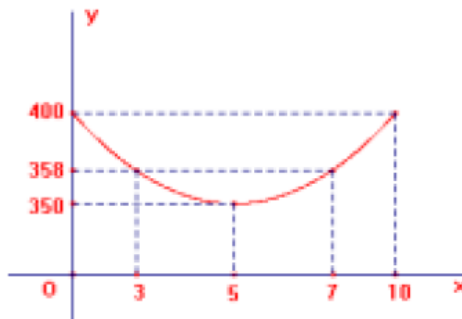
C) O custo total dos canteiros é igual a

$$\text{custo do canteiro de grama} + 4 \times (\text{custo de um canteiro de pedra})$$

O custo do canteiro de grama é $4(2x^2 - 20x + 100)$ reais e o de um canteiro de pedra é $3 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x)$ reais. Designando por $c(x)$ o custo total dos canteiros em função de x , temos

$$c(x) = 4 \cdot (2x^2 - 20x + 100) + 4 \cdot \left[3 \cdot \frac{1}{2}x(10 - x) \right] = 2x^2 -$$

O gráfico da função c é a parábola representada ao lado (*atenção*: este é apenas um esboço do gráfico, sem respeitar a escala ao longo do eixo dos y). O



valor mínimo de c é assumido quando $x = \frac{20}{2 \times 2} = 5$; o custo mínimo é então

$$c(5) = 2 \times 5^2 - 20 \times 5 + 400 = 350 \text{ reais.}$$

D) Se o prefeito construir uma praça cujo canteiro de grama tem área de $a \text{ m}^2$, então o custo total da praça é $4a + 3(100 - a) = 300 + a$ reais. Vemos assim que o custo cresce quando a cresce, e deste modo a área máxima do canteiro de grama corresponde ao máximo que o prefeito pode gastar, que é R\$358,00. Neste caso temos a equação $300 + a = 58$, donde o maior canteiro de grama que o prefeito pode construir tem área de 58 m^2 .

12.

A única possibilidade (a menos de rotações e simetrias) é mostrada abaixo:

